3°/

a) $\frac{1}{U_{n+1}}-\frac{1}{U_n}=\frac{1+U_n+U_n^2}{U_n}-\frac{1}{U_n}=\frac{U_n+U_n^2}{U_n}=1+U_n$

On a : $0 \le U_n \le \frac{1}{n+1}$

D'où : $1 \le 1+U_n \le 1+\frac{1}{n+1}$

Et par suite $1 \le \frac{1}{U_n+1}-\frac{1}{U_n} \le 1+\frac{1}{n+1}$

b) On a : pour tout $k \ge 1$

$$1 \le \frac{1}{U_k}-\frac{1}{U_k-1} \le 1+\frac{1}{k}$$

D'où : $\sum_{k=1}^{n} 1 \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{U_k}-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{U_{k-1}} \le \sum_{k=1}^{n} 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$n \le \left(\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}+....+\frac{1}{U_n}\right)-\left(\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+....+\frac{1}{U_{n-1}}\right) \le n+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$n \le \frac{1}{U_n}-\frac{1}{U_0} \le n+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n \le \frac{1}{U_n}-1 \le n+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{U_k}$